به نام خدا

درس آمار و احتمال مهندسی
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر مطهری

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دوم

طراحان: کیارش کیانی،اریانا کوچکی داریونی، امیررضا سعیدی، امیرحسین رضایی، سینا محمدی، کیهان هدایی

- پرسش‌های خود را می‌توانید در صفحه کوئرای درس مطرح کنید.
- نوشتن نام خود را فراموش نفرمایید.
- برای پاسخ به سوالات در صورتی که از برگه خود عکس تهیه می کنید، حتما توجه داشته باشید که تصویر کاملا واضح و خوانا باشد. پاسخ شما، در صورتی که خوانایی کافی را نداشته باشد، تصحیح نخواهد شد.
- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر تمرین‌ها بدون کسر نمره تا سقف ۱۰ روز مجموعاً در کل ترم وجود دارد. محل بارگزاری جواب تمرین‌ها بعد از ۳ روز بسته خواهد شد و پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند شد. همچنین ٪۱۵ کاهش نمره به ازای هر روز دیرکرد غیرمجاز به صورت خطی اعمال خواهد شد.

---

۱. (۵ نمره) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح غیرمنفی باشد که توزیع جرم احتمال ان به صورت زیر است.

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{c(2^{k-1})3}{(k)!} & k=0,1,2,3\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

مقدار c را طوری بیابید که $P(X=k)$ یک تابع توزیع احتمال معتبر باشد.

۲. (۱۰ نمره) توزیع جرم احتمال متغیر تصادفی X برای مقادیر صحیح بزرگ تر از صفر به صورت زیر می باشد:

$$P(X=k)=\frac{1}{k(k+1)} \qquad k=1,2,3,...$$

(آ) (۵ نمره) نشان دهید که $P(X=k)$ یک توزیع احتمال معتبر می باشد.

(ب) (۵ نمره) تابع توزیع تجمعی را بیابید.

۳. (۱۰ نمره) کیهان می خواهد یک جشن بزرگی را در حیاط خانه اش برگزار کند اما به دلیل اینکه پیش بینی های اب و هوایی نشان می دهند که در روز برگزاری هوا ابری می باشد و احتمال بارش باران خواهد بود، ناراحت شده که ممکن است کسی به جشن نیاید. یک متخصص آمار و احتمال، طی یک ماه گذشته داده هایی را در رابطه با شرکت کردن مردم در مراسم مختلف در شرایط متفاوت آب و هوایی از سطح شهر جمع اوری کرده و این داده ها را در جدولی در اختیار کیهان گذاشته است. میتوانید این جدول را مشاهده کنید:

احتمال	حضور افراد در مراسم	آب و هوا
۰.۲	شرکت نکردند	آفتابی
۰.۳	شرکت کردند	آفتابی
۰.۴	شرکت نکردند	ابری
۰.۱	شرکت کردند	ابری

(آ) (۵ نمره) به کیهان کمک کنید که بداند به چه احتمالی دوستانش در جشنش شرکت می کنند.

(ب) (۵ نمره) با توجه به این داده ها آیا حضور افراد در جشن مستقل از شرایط آب و هوایی بوده یا خیر ؟

۴. (۱۰ نمره) اگر متغیر تصادفی X از توزیع پوآسون با پارامتر λ بیاید. اثبات کنید:

$$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}]$$

۵. (۱۵ نمره) اگر وزن هر انسان از توزیع نرمال با میانگین ۷۵ و واریانس ۹ پیروی کند.

(آ) (۵ نمره) وزن چند درصد از افراد بین ۶۰ تا ۹۰ می باشد؟

(ب) (۱۰ نمره) اگر وزن افراد از یک دیگر مستقل باشند(یعنی i.i.d باشند) چقدر احتمال دارد در یک جمع ۵ نفره که وزن هر نفر از ۶۹ بیشتر است. وزن حداقل ۳ نفر از ۸۱ بیشتر باشد؟

۶. (۱۰ نمره) قلی ادم درونگرایی است به طوری که معمولا در روز ادم های زیادی نمی بیند ولی هر ۷ روز یک بار او یک روز اجتماعی می شود و ادم های زیادی را ملاقات می کند. در روز های معمولی تعداد افرادی که قلی می بیند از توزیع پوآسون با پارامتر λ یروی می کند و در روز هایی که اجتماعی میشود تعداد افرادی که میبیند از توزیع پوآسون با پارامتر 2λ پیروی میکند.

(آ) (۵ نمره) اگر به طور تصادفی یک روز را انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد قلی هیچ نفر را در ان روز ندیده باشد.

(ب) (۵ نمره) اگر بدانیم که دیروز قلی k نفر را دیده باشد چقدر احتمال دارد که قلی دیروز اجتماعی بوده باشد.

۷. (۱۵ نمره) فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y را داشته باشیم که به ترتیب از توابع توزیع $\mathcal{N}(0,1)$ و $Expo(\lambda)$ تبعیت می کنند. با توجه به تعریف متغیر تصادفی Z، تابع توزیع این متغیر تصادفی جدید را بیابید.

$$Z = \begin{cases} X & if Y \geq a \\ -X & Otherwise \end{cases} \qquad a > 0$$

۸. (۱۵ نمره) احتمال شیر آمدن سکه ای P است. n پرتاب مستقل را از این سکه در نظر بگیرید. اگر خروجی یک پرتاب با خروجی پرتاب قبل فرق کند می گوییم تحولی رخ داده است. برای مثال اگر الگوی پرتاب [رو، پشت، رو، رو، پشت] باشد یعنی ۳ تحول داریم. امید ریاضی تعداد تحولات را بدست اورید.

۹. (۱۰ نمره) با توجه به دستگیری اخیر پاول دورف (مدیر تلگرام)، او تصمیم گرفته تا نظارت را بر تلگرام بیشتر کند تا فعالیت ها مجرمانه در این بستر کاهش یابد. برای این کار او n نفر را به طور تصادفی از بین افراد یک کشور انتخاب می کند و میخواهد تعداد گروه های ۳ تایی از فراد که دو به دو با هم در ارتباط اند را محاسبه کند. چون بنابر امار، احتمال وقوع فعالیت مجرمانه در گروه های سه نفره از بقیه گروه ها بیشتر است. اگر احتمال ارتباط داشتن دو شخص با هم p باشد. میانگین و واریانس تعداد گروه های سه نفره در بین این n نفر چقدر است ؟ (در مساله p و n ثابت اند.)